

Algebra III - Abstraktna algebra, 1. kolokvij, 23.11.2016.

1. Dana je množica $G = \{x + y\sqrt{5} \mid x^2 - 5y^2 = 1, x, y \in \mathbb{Q}\}$. Pokaži, da je (G, \cdot) grupa, kjer je \cdot običajno množenje realnih števil. Ali je grupa G abelska?

Re.

$$(x_1 + y_1\sqrt{5})(x_2 + y_2\sqrt{5}) = (x_1x_2 + 5y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)\sqrt{5}, (x_1x_2 + 5y_1y_2)^2 - 5(x_1y_2 + y_1x_2)^2 = 1, \\ 1 = 1 + 0\sqrt{5} \in G, (x + y\sqrt{5})^{-1} = x - y\sqrt{5} \in G.$$

□

2. Za vse podgrupe reda 8 v grupi \mathbb{Z}_{32} napiši vse njihove generatorje.

Re.

$$|\langle 16 \rangle| = 2, |\langle 8 \rangle| = |\langle 24 \rangle| = 4, |\langle 4 \rangle| = |\langle 12 \rangle| = |\langle 20 \rangle| = |\langle 28 \rangle| = 8.$$

□

3. Dana je grupa $G = \{1, 2, \dots, 12\}$ z operacijo množenja po modulu 13. Določi vse homomorfizme iz grupe G v grupo $(\mathbb{Z}_6, +)$.

Re.

Obstaja 6 različnih homomorfizema, $\phi : G \rightarrow \mathbb{Z}_6, 2^k \rightarrow ka$ za $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

□

4. Napiši vse leve odseke podgrupe $\langle (1432) \rangle$ v grupi S_4 .

Re.

$\text{id}H, (12)H, (13)H, (14)H, (23)H$ in $(34)H$.

□

5. Naj bo G grupa in $a, b, c \in G$ elementi grupe G , za katere velja $a \cdot b \cdot c = e$, kjer je e enota grupe G . Pokaži, da potem velja tudi $b \cdot c \cdot a = e$.

Re.

$$abc = e, bc = a^{-1}, bca = e.$$

□